

Многомасштабное моделирование гетерогенного материала с помощью отображающего объемного элемента (Representative Volume Element)

Цзэлянг Лю¹, С. Т. У¹, Бо Рен¹, Уинг Кам Лю², Роджер Граймс¹

¹ *Livermore Software Technology Corporation, Ливермор, Калифорния 94551*

² *Северо-Западный Университет, Эванстон, Иллинойс 60208*

Перевод В. Б. Литвинова под ред. Б. Г. Рубцова

Резюме

В настоящей статье представлен многомасштабный метод моделирования материалов с разнородными структурами (типа композитов). Эта методика с сопутствующим (совмещенным, параллельно исполняемым) определением параметров напряженно-деформированного состояния позволяет избежать сложностей с построением макромасштабных феноменологических моделей материала и трудоемких процессов калибровки моделей путем прямого установления взаимосвязи между структурой на микроуровне и откликом на макроуровне посредством вычислительной гомогенизации. В процессе такой гомогенизации модель связывает каждую макроскопическую точку интегрирования с так называемым «отображающим объемным элементом» (Representative Volume Element, RVE) микроструктуры, и макроскопический отклик находится за счет решения краевой задачи для элемента RVE. Методы DNS (прямого численного моделирования, например, FEM) могут давать достоверные результаты по отклику материалов со сложной фазовой морфологией и сложным поведением. В то же время есть необходимость ускорить анализ по методу RVE с помощью современных методик сокращения модели для того, чтобы можно было проводить эффективное сопутствующее моделирование.

Для решения двух- и трехмерных задач был разработан пакет для анализа по методу RVE, основанный на неявном конечно-элементном анализе. Пакет существует в одно- и многопроцессорных версиях. Мы не используем отдельные пакеты для пред- и пост-обработки, как это часто делается в другом ПО конечно-элементного анализа, мы полностью интегрировали весь процесс анализа по методу RVE в ПО LS-DYNA®, включая подготовку граничных условий, конечно-элементный анализ краевой задачи и гомогенизацию по методу RVE. Основные черты пакета для анализа по методу RVE следующие: 1) автоматический перенос периодических и постоянных граничных условий (ГУ) на сетку элемента RVE; 2) наличие несопадающих сеток на гранях элементов (non-matching meshes); 3) действие произвольных нагрузок, таких как одноосная и сдвиг; 4) сохранение результатов RVE-гомогенизации в базе данных LS-DYNA как для задач с бесконечно малыми деформациями, так и для задач с конечными деформациями.

*В настоящее время все указанные функции пакета задаются двумя ключевыми словами LS-DYNA: *RVE_ANALYSIS_FEM и *DATABASE_RVE. Для демонстрации возможностей пакета RVE можно воспользоваться некоторыми результатами численных решений контрольных задач (бенчмарками). Также будет рассмотрена связь между пакетом RVE и методиками сокращения модели с управляемыми данными (data-driven model reduction techniques).*

1. Введение

Структура материалов имеет иерархический порядок, и следовательно, в них происходит взаимодействие между простыми компонентами малого масштаба, совместно образующими сложные составные структуры, которые могут простираются на несколько масштабов по времени и длине. С одной стороны, современные методики производства, такие как трехмерная печать [1-3], позволяют изготавливать иерархически структурированные композиты в масштабе от нано- до макро-масштаба, которые обладают очень хорошими тепловыми, электрическими или механическими свойствами [4]. Такая многомасштабная природа гетерогенных материалов постоянно создает проблемы для вычислительного моделирования макроскопических структур. В идеале эффективные и точные прогнозы макроскопического поведения гетерогенных материалов должны однозначно определяться поведением материала каждого составляющего элемента (фазы материала) и информацией о микроструктуре материала [5].

Традиционные феноменологические определяющие соотношения [6-8] характеризуют средние характеристики материала, т. е. вклады всех фаз материала без учета взаимодействий между его отдельными составляющими. В этом смысле материалы рассматриваются как «черный ящик», что подразумевает весьма трудоемкое исследование характеристик материала и затратную калибровку моделей. Кроме того, эти соотношения сильно зависят от постановки задачи и могут не давать решения при попытках описать сильно локализованное нелинейное поведение материала, определяемое микроструктурой, такое как пластичность, разрушение и усталость. Обобщенная механика сплошных сред, известная как теория больших градиентов, предлагает вводить информацию о микроуровне путем задания градиента деформации более высокого порядка [9]. Первая реализация такого подхода, известная как микро-морфологическая сплошная среда (micro-morphic continuum), была разработана Тупиным [10], Миндлиным [11] и Эрингеном [12]. Введением произвольного числа дополнительных градиентов деформации этот подход был обобщен в работе Лю с соавторами [13]. В настоящее время проблема теории больших градиентов заключается в определении большого числа коэффициентов для тензоров высокого порядка [14]. Градиент деформации обычно не задается напрямую микроструктурой, в результате модель становится феноменологической, что требует дополнительной работы по калибровке этих коэффициентов.

Современные совмещенные методы [15, 16] предпочитают не использовать процесс калибровки феноменологических моделей за счет прямого установления связи между микроструктурой и макро-откликом материала с помощью так называемого метода гомогенизации. В процессе гомогенизации эти совмещенные методы связывают каждую макроскопическую точку с отображающим объемным элементом (RVE) микроструктуры, а макроскопический параметр (например, напряжение) получается путем усреднения внутри элемента RVE. Для материала с произвольной микроструктурой истинные макроскопические свойства получаются как сходящиеся величины только в том случае, когда размер RVE становится достаточно большим или в случае, когда элемент RVE оказывается статистически представительным образцом материала. Затем на основе прямого численного моделирования методом RVE при использовании конечно-элементного подхода или метода быстрого преобразования Фурье для ускорения совмещенного моделирования можно применять методики сокращения модели. На рисунке 1 приведен пример совмещенного моделирования при помощи метода управляемых данных, который называется самосогласованным кластерным анализом (SCA) [17,18].

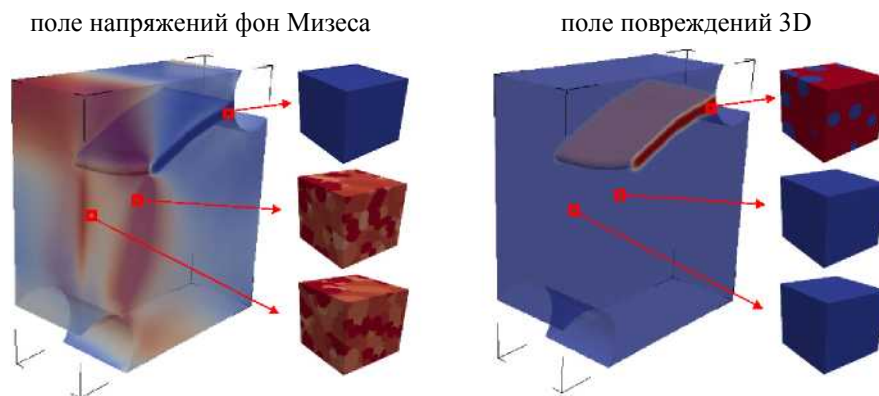


Рисунок 1. Иллюстрация совмещенного многомасштабного моделирования, основанного на анализе методом RVE и управляемого данными. Макроскопический отклик материала управляется микро-масштабной краевой задачей RVE. Пакет метода RVE, описываемый в статье, является базовым для совмещенного моделирования.

В этой статье мы представляем недавно разработанный пакет RVE для комплекса LS-DYNA. В разделе 2 обсуждается общая теория гомогенизации, включая определение RVE. Различные варианты выбора граничных условий и обработка несовпадающих сеток

представлены в разделе 3. Все функции пакета RVE задаются двумя новыми ключевыми словами LS-DYNA: **RVE_ANALYSIS_FEM* и **DATABASE_RVE*, описанными в разделе 4. В разделе 5 на нескольких численных примерах выполняется проверка пакета RVE. На основе анализа RVE можно сгенерировать большой объем данных по отклику RVE для обучения наших моделей материалов с управляемыми данными при помощи методик машинного обучения. Текущие исследования по этой теме кратко обсуждаются в разделе 6.

2. Теория гомогенизации

Гомогенизацию первого порядка, которая в основном используется в этой работе, можно определить, предположив разделение масштабов и устранив действие внешних сил внутри области RVE. Введем величину \mathcal{U} в качества пространства допустимых микроскопических смещений \mathbf{u} внутри области Ω с границей Γ . Можно доказать – в рамках классических граничных условий первого порядка, таких как граничные условия смещения (DBC), граничные условия сил сцепления (TBC) и периодические граничные условия (PBC), – что при малых деформациях выполняется следующее уравнение:

$$\langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_{\Omega} : \langle \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega} = \langle \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_{\Omega}, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{U} \quad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ – напряжение Коши и бесконечно малая деформация соответственно. Кроме того, символом $\langle \dots \rangle_{\Omega}$ определяется среднее по объему значение внутри области RVE:

$$\langle \dots \rangle_{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \dots d\Omega \quad (2)$$

Уравнение (1) – это так называемое условие макро-гомогенности Хилла-Манделя [19, 20], которое эквивалентно утверждению о том, что плотность виртуальной работы в макро-масштабе сохраняется и в микро-масштабе. Оно также гарантирует, что гомогенизированные деформация и напряжение являются допустимыми переменными в основных уравнениях макро-масштаба.

Для задач с конечной деформацией условие Хилла-Манделя можно переписать в следующем виде:

$$\langle \mathbf{P} \rangle_{\Omega} : \langle \delta \mathbf{F} \rangle_{\Omega} = \langle \mathbf{P} : \delta \mathbf{F} \rangle_{\Omega}, \quad \forall \delta \mathbf{u} \in \mathcal{U} \quad (3)$$

Формулировка с конечной деформацией является более общей, и она может вырождаться до уравнения (1) при условии малой деформации. В текущей версии пакета RVE используется формулировка с конечной деформацией, а также градиентом деформации \mathbf{F} и первым напряжением Пиола-Кирхгоффа \mathbf{P} в качестве меры деформации и напряжения.

Размер области RVE должен быть достаточно большим, чтобы содержать достаточную статистическую микроструктурную информацию о материале. Теоретически, для получения точных результатов гомогенизации, всегда лучше иметь сравнительно большой размер области RVE. Однако на практике размер RVE ограничен затратами расчета. Лучший способ определить подходящий размер RVE – провести исследование сходимости и выбрать наименьший размер, соответствующий допуску на точность (например, 5%).

Прямое численное моделирование (DNS) является наиболее точным и гибким методом гомогенизации для решения задачи методом RVE. К методам прямого численного моделирования относятся метод конечных элементов и методы микромеханики на основе быстрого преобразования Фурье [21]. В настоящее время пакет RVE разработанный для LS-DYNA основан на конечно-элементном методе, так как этот метод может гибко обрабатывать сложные геометрии и неравномерные сетки. Если у модели RVE большое число степеней свободы, то прямое численное моделирование может быть очень затратным по времени. Вопрос времени может быть еще более серьезным в совмещенном многомасштабном моделировании, так как каждая точка интегрирования связана с моделью RVE. Таким образом, для ускорения

анализа RVE необходимо применять методики уменьшения модели. В разделе 6 обсуждаются некоторые продолжающиеся работы по разработке новых методик машинного обучения, которые должны обеспечить быстрое и точное многомасштабное моделирование.

3. Граничные условия в методе RVE

В зависимости от макроскопических ограничений для напряжений или деформаций при использовании RVE могут быть заданы различные типы граничных условий. В настоящее время в программе LS-DYNA реализованы периодические граничные условия и граничные условия смещения. Эти два типа граничных условий (ГУ) при одноосной растягивающей нагрузке показаны на рисунке 2. В литературе показано, что для периодических ГУ нужен меньший размер области RVE, при котором обеспечивается сходимость результатов гомогенизации, а граничные условия для смещений обычно дают более жесткий отклик, поскольку все грани элемента должны быть плоскими, как показано на рисунке. Однако если размеры RVE достаточно велики, то влияние типа граничных условий становится незначительным.

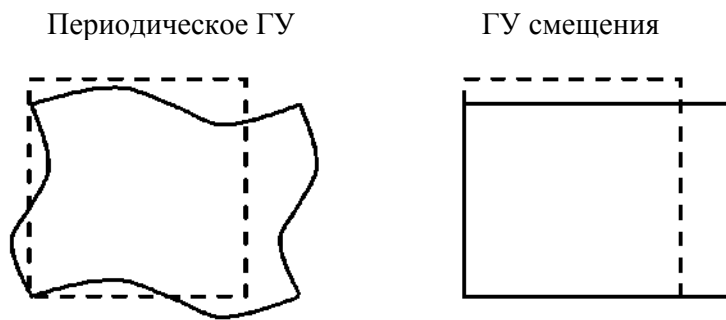


Рисунок 2. Периодическое ГУ и ГУ смещения с одним и тем же ограничением RVE по деформации

И для периодического ГУ, и для ГУ смещения макроскопическое ограничение RVE по деформации задается через так называемые контрольные точки, которые являются дополнительными точками в исходной модели RVE. В двумерной задаче используются 2 контрольные точки, а в трехмерной задаче – 3. Связи между смещением контрольных точек и макроскопической деформацией показаны ниже.

		u_x	u_y			
Задача 2D	c^1	$(\bar{F}_{xx} - 1)\Delta x$	$\bar{F}_{yx}\Delta x$			
	c^2	$\bar{F}_{xy}\Delta y$	$(\bar{F}_{yy} - 1)\Delta y$			
		u_x	u_y	u_z		
Задача 3D	c^1	$(\bar{F}_{xx} - 1)\Delta x$	$\bar{F}_{yx}\Delta x$	$\bar{F}_{zx}\Delta x$		
	c^2	$\bar{F}_{xy}\Delta y$	$(\bar{F}_{yy} - 1)\Delta y$	$\bar{F}_{zy}\Delta y$		
	c^3	$\bar{F}_{xz}\Delta z$	$\bar{F}_{yz}\Delta z$	$(\bar{F}_{zz} - 1)\Delta z$		

c – контрольная точка; u – смещение; \bar{F} – градиент деформации

Рисунок 3. Соотношения между перемещениями контрольных узлов и градиентом макро-деформаций для случаев 2D и 3D

Когда градиенты деформации элемента RVE являются полностью неограниченными в направлении сдвига, решение не является единственным, и это вызывает численные проблемы. В таком случае для общего трехмерного случая необходимо ввести дополнительные ограничения для недиагональных компонентов:

$$\bar{F}_{yx} = \bar{F}_{xy}, \quad \bar{F}_{zx} = \bar{F}_{xz}, \quad \bar{F}_{yz} = \bar{F}_{zy}, \quad (4)$$

которые указывает на то, что усредненный градиент деформации является симметричным. В терминах компонентов смещения можно записать соотношения

$$u_y^{c^1} \Delta y = u_x^{c^2} \Delta x, \quad u_z^{c^1} \Delta z = u_x^{c^3} \Delta x, \quad u_z^{c^2} \Delta z = u_y^{c^3} \Delta y, \quad (5)$$

где $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ представляют собой размеры элемента RVE. Заметим, что размеры не обязательно должны быть одинаковыми. Для произвольной сетки элемента RVE размеры автоматически измеряются программой и сохраняются для соответствующих расчетов.

Программа решения краевой задачи для RVE решается при помощи неявного решателя LS-DYNA. После конечно-элементного анализа элемент RVE должен быть гомогенизирован, чтобы получить макроскопические отклики материалов. Более эффективный способ состоит в том, чтобы не делать усреднение по объему на основании уравнений (1) и (3), а напрямую извлекать макроскопические величины в контрольных точках. Соотношения между силами реакции в контрольных точках и макроскопическими напряжениями приводится ниже.

		f_x	f_y	
Задача 2D	c^1	$\bar{P}_{xx} \Delta y \Delta z$	0	
	c^2	$2\bar{P}_{xy} \Delta x \Delta z$	$\bar{P}_{yy} \Delta x \Delta z$	
		f_x	f_y	f_z
Задача 3D	c^1	$\bar{P}_{xx} \Delta y \Delta z$	0	0
	c^2	$2\bar{P}_{xy} \Delta x \Delta z$	$\bar{P}_{yy} \Delta x \Delta z$	0
	c^3	$2\bar{P}_{xz} \Delta x \Delta y$	$2\bar{P}_{yz} \Delta x \Delta y$	$\bar{P}_{zz} \Delta x \Delta y$

c – контрольная точка; f – сила реакции; \bar{P} – первое напряжение Пиола-Кирхгоффа

Рисунок 4. Соотношение между силой реакции контрольных узлов и макроскопическим первым напряжением Пиола-Кирхгоффа в задачах 2D и 3D

Первое напряжение Пиола-Кирхгоффа также является симметричным при ограничениях в уравнении (4):

$$\bar{P}_{yx} = \bar{P}_{xy}, \quad \bar{P}_{zx} = \bar{P}_{xz}, \quad \bar{P}_{zy} = \bar{P}_{yz}, \quad (6)$$

Когда определены гомогенизированный градиент деформации и первое напряжение Пиола-Кирхгоффа, нетрудно рассчитать другие параметры деформации и напряжения (например, бесконечно малую деформацию и напряжение Коши). Все макроскопические величины будут автоматически собраны программой и по запросу пользователя записаны в базу данных.

Для граничных условий смещения, вершина элемента RVE выбирается в качестве начала координат и фиксируется, чтобы устранить движение как жесткого тела. Смещение узла на грани \mathbf{u}' с координатой $\mathbf{X} = \{x, y, z\}$ подчиняется соотношению

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{X} \quad (7)$$

Ситуация с периодическим граничным условием более сложная. Для пары узлов $\{\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2\}$ на плоскости x-y должны быть выполнены следующие уравнения-ограничения:

$$u_x^2 - u_x^1 = u_x^{c1}, \quad u_y^2 - u_y^1 = u_y^{c1}, \quad u_z^2 - u_z^1 = u_z^{c1} \quad (8)$$

Аналогично могут быть выведены уравнения-ограничения для узлов в плоскостях y-z и x-z. Более того, узел внутри RVE зафиксирован, чтобы избавиться от движения как жесткого тела.

Проблема несовпадающих сеток решается при помощи концепции главных и подчиненных граней. Для каждой пары граней в качестве главной выбирается грань с меньшим числом узлов, а вторая становится подчиненной. Как показано на рисунке 5, узлы, обозначенные i, j, k на подчиненной грани, проецируются на главную поверхность. Затем спроецированные узлы ограничиваются узлами на главной поверхности. Например, если спроецированный узел j' узла j попадает на элемент с узлами I, J, K , то смещение узла j' ограничивается уравнением

$$\mathbf{u}^{j'} = \mathbf{N}^I \mathbf{u}^I + \mathbf{N}^J \mathbf{u}^J + \mathbf{N}^K \mathbf{u}^K, \quad (9)$$

где \mathbf{N}^I – функция формы элемента для узла I в положении узла j' .

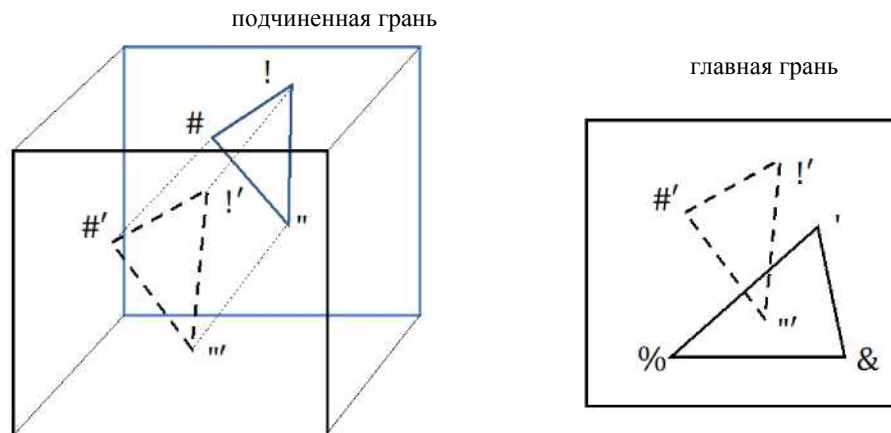


Рисунок 5. Обработка несовпадающих сеток

Метод основан на том, что на главной и подчиненной гранях могут оказаться неуравновешенные силы, и это может повлиять на точность расчета. Поэтому, по возможности, всегда предпочтение отдается совпадающим сеткам элемента RVE. Однако если сложно или невозможно получить хорошую совпадающую сетку, для применения периодических граничных условий можно использовать этот метод, основанный на главных и подчиненных поверхностях.

4. Ключевые слова LS-DYNA для анализа RVE

К пакету метода RVE можно обращаться с использованием двух новых слов в LS-DYNA: «*RVE_ANALYSIS_FEM» и «*DATABASE_RVE». В этом разделе детально описываются эти ключевые слова.

Команда «*RVE_ANALYSIS_FEM» – главное ключевое слово анализа RVE. На рисунке 6 приводятся опции ввода.

Карта 1	1	2	3	4	5	6	7	8
Переменная	MESHFILE							
Тип	A80							
Умолчание	нет							

Карта 1	1	2	3	4	5	6	7	8
Переменная	MESHFILE							
Тип	A80							
Умолчание	нет							

Карта 3	1	2	3	4	5	6	7	8
Переменная	E11	E22	E33	E23	E13	E12		
Тип	F	F	F	F	F	F		
Умолчание	нет	нет	нет	нет	нет	нет		

Рисунок 6. Параметры ввода ключевого слова *RVE_ANALYSIS_FEM

Здесь «MESHFILE» – имя файла пользовательского ввода, содержащего информацию о сетке RVE. Параметр «INPT» определяет, что файл граничных условий задается пользователем. Если такого файла нет (INPT=0), программа создает новый файл под именем «RVE_MESHFILE», в котором будет содержаться ввод для граничных условий. Параметр «LCID» – идентификатор кривой нагружения, которая задается ключевым словом «*DEFINE_CURVE». Переменная «IDOF» – число измерений элемента RVE (2 или 3). Параметр «BC» задает тип граничного условия. В настоящее время пакет поддерживает периодические граничные условия (BC=0) и граничные условия смещения (BC=1). Переменная «IUNT» сообщает программе, имеется ли у данного RVE сетка стыковки (IUNI=1). Обратите внимание, что алгоритм генерирования периодического ГУ работает более эффективно для значения IUNI=1. Опции ввода в карте 3 – это компоненты деформации, задаваемой для элемента RVE:

$$E_{ii} = F_{ii} - 1, \quad E_{ij} = F_{ij} (i \neq j) \quad (10)$$

Если поле ввода для компонента деформации остается пустым, в этом направлении будет приложено условие отсутствия напряжения. Для двухмерных задач (IDOF=2) ввод в полях E33, E23, E13 игнорируется.

Команда «*DATABASE_RVE» – ключевое слово для выдачи результатов анализа RVE. Параметры ввода указаны на рис. 7.

Карта 1	1	2	3	4	5	6	7	8
Переменная	DT	BINA						
Тип	F	I						
Умолчение	None	0						

Рисунок 7. Варианты ввода для ключевого слова *DATABASE_RVE

Переменная «DT» обозначает временной интервал выдачи результатов для базы данных. Параметр «BINA» определяет формат выдачи результатов гомогенизации: при BINA=0 в файл базы данных ASCII под именем «rveout» или в бинарную базу данных LS-DYNA при BINA=1.

Численные примеры

Представлено несколько численных примеров для проверки возможностей пакета RVE как в 2D (плоская деформация), так и в 3D. Во-первых, двух- и трехмерные элементы RVE со включениями в матрице исследуются при конечной деформации. Материалы и матрицы, и включений – изотропно-гиперупругие. Упругие постоянные материала следующие: модуль упругости $E_{\text{матрицы}} = 100$ МПа, $E_{\text{включения}} = 1$ ГПа, коэффициенты Пуассона $\nu_{\text{матрицы}} = \nu_{\text{включения}} = 0,3$. Результаты для периодических граничных условий и условий смещения представлены на рисунке 8.

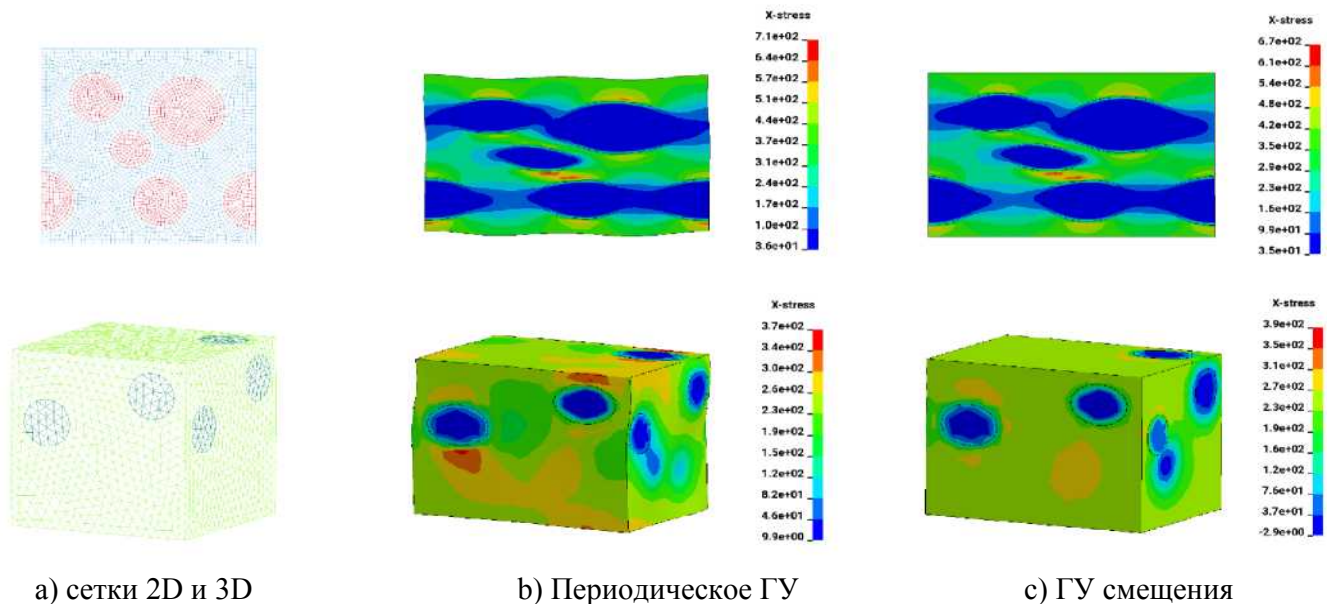


Рисунок 8. Результаты расчета RVE при одноосном растяжении ($E_{11} = 0.4$) для двух видов граничных условий.

Используя контрольные точки, можно легко задать различные условия нагружения элемента RVE. На рисунке 9 показано результаты трехмерного моделирования при одноосном растяжении, сдвиге и смешанных нагрузках.

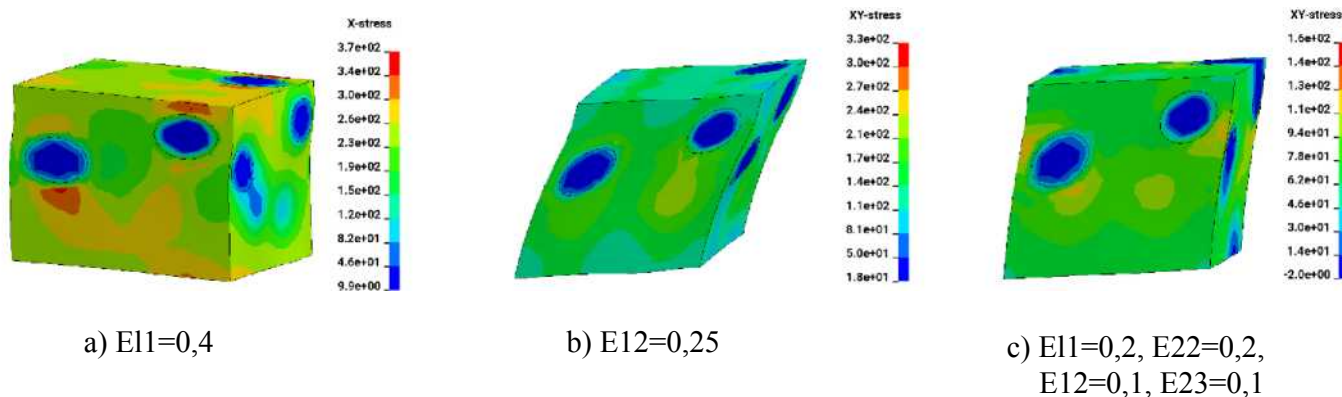


Рисунок 9. Результаты моделирования при одноосном нагружении, сдвиге и смешанном нагружении

Наконец, пакет RVE использовался для моделирования композитного материала, армированного углеродным волокном. Материал матрицы был изотропно упругим, постоянная материала $E_{\text{матрицы}} = 3$ ГПа и $\nu_{\text{матрицы}} = 0,2$. Ткань может рассматриваться как композит с однонаправленным волокном, введенным в материал матрицы, и поэтому материал ткани принимается за ортотропно упругий. Свойства ткани в направлении волокна следующие: $E_a = 200$ ГПа, $E_b = 10$ ГПа, $E_c = 10$ ГПа, $\nu_{ba} = 0.02$, $\nu_{ca} = 0.02$, $\nu_{cb} = 0.4$, $G_{ab} = 5$ ГПа, $G_{bc} = 5$ ГПа, $G_{ca} = 5$ ГПа. К элементу RVE приложены периодические граничные условия. Результаты моделирования при одноосном растяжении ($E_{11} = 0,01$) показаны на рисунке 10.

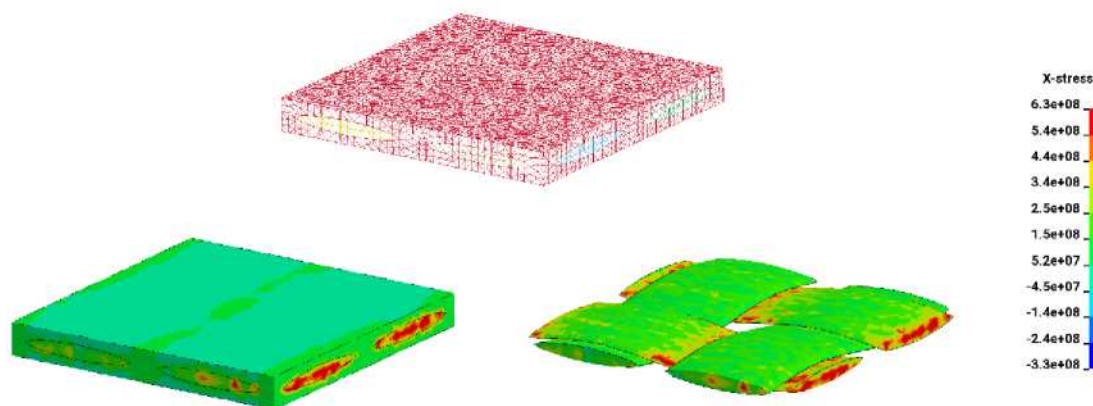


Рисунок 10. Результаты моделирования тканых композитов при одноосном растяжении $E_{11}=0,01$.

6. Текущие исследования моделирования материалов с поведением, управляемым данными

Сложность моделирования взаимодействия между микроструктурами в микро-масштабе распространяется и на макро-масштаб, и большая проблема заключается в описании поведения на уровне макро-масштаба с использованием феноменологического определяющего соотношения замкнутого типа. Новый пакет RVE в ПО LS-DYNA – хороший инструмент для построения данных о макроскопических свойствах материала высокой достоверности на основе микроструктурной информации. Однако для проведения совмещенного многомасштабного моделирования анализ RVE, основанный на прямом численном моделировании, все еще остается очень затратным по времени. В силу этого одной из тем наших текущих исследований является управляемое данными моделирование материалов и изучение новых путей создания многомасштабной базы данных по материалам. Это будет комбинация механической теории

гомогенизации и машинного обучения, основанного на данных, полученных в ходе анализа RVE.

Современные методики машинного обучения («глубокое обучение») достигли впечатляющих успехов во многих направлениях компьютерной техники, таких как компьютерное зрение, игровые приложения, обработка естественного языка. Хотя в этих методиках можно строить сложные соотношения между входной и выходной информацией, их приложения в области механики материалов все еще очень ограничены. Такие вопросы, как зависимость свойств материала от истории обработки и физическая инвариантность, не решаются естественным путем, главным образом за счет потери физического смысла в современных моделях обучения. Сложность получения откликов гетерогенных материалов становится особенно очевидной, когда рассматривается нелинейное поведение материала (гиперупругость, пластичность, разрушение) в сочетании с произвольной траекторией нагружения. В настоящее время мы исследуем новые механические модели машинного обучения, в которых происходит меньшая потеря физического смысла при прогнозировании свойств RVE. Аналогичные модели также можно применять в других областях вычислительной механики, где важна передача информации между событиями разных масштабов, например в таких приложениях, как производство и моделирование соударений.

Литература

- [1] Jakus, A. E., Secor, E. B., Rutz, A. L., Jordan, S. W., Hersam, M. C., and Shah, R. N. Three-dimensional printing of high-content graphene scaffolds for electronic and biomedical applications. *ACS nano* 9, 4(2015), 4636-4648.
- [2] Meza, L. R., Das, S., and Greer, J. R. Strong, lightweight, and recoverable three-dimensional ceramic nanolattices. *Science* 345, 6202 (2014), 1322-1326.
- [3] Meza, L. R., Zelhofer, A. J., Clarke, N., Mateos, A. J., Kochmann, D. M., and Greer, J. R. Resilient 3D hierarchical architected metamaterials. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 112, 37 (2015), 11502-7.
- [4] Ramanathan, T., Abdala, A., Stankovich, S., Dikin, D., Herrera-Alonso, M., Piner, R., Adamson, D., Schniepp, H., Chen, X., Ruoff, R., et al. Functionalized graphene sheets for polymer nanocomposites. *Nature nanotechnology* 3, 6 (2008), 327-331.
- [5] Z. Liu, Reduced-order Homogenization of Heterogeneous Material Systems: from Viscoelasticity to Nonlinear Elastoplastic Softening Material. PhD Thesis (2017).
- [6] Gurson, A. L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part i—yield criteria and flow rules for porous ductile media. *Journal of engineering materials and technology* 99, 1 (1977), 2-15.
- [7] de Souza Neto, E., Peric, D., and Owen, D. Computational methods for plasticity: theory and applications. Wiley, 2008.
- [8] Werner, B. T., and Daniel, I. M. Characterization and modeling of polymeric matrix under multi-axial static and dynamic loading. *Composites Science and Technology* 102 (2014), 113-119.
- [9] Geers, M. G., Kouznetsova, V. G., and Brekelmans, W. Multi-scale computational homogenization: Trends and challenges. *Journal of computational and applied mathematics* 234, 7 (2010), 2175-2182.
- [10] Mindlin, R. D. Micro-structure in linear elasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 16, 1 (1964), 51-78.
- [11] Toupin, R. A. Theories of elasticity with couple-stress. *Archive for Rational Mechanics and Analysis* 17, 2 (1964), 85-112.
- [12] Eringen, A. C. Mechanics of micromorphic continua. In *Mechanics of generalized continua*. Springer, 1968, pp. 18-35.
- [13] Vernerey, F., Liu, W. K., and Moran, B. Multi-scale micromorphic theory for hierarchical materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 55, 12 (2007), 2603-2651.
- [14] Tran, T.-H., Monchiet, V., and Bonnet, G. A micromechanics-based approach for the derivation of constitutive elastic coefficients of strain-gradient media. *International Journal of Solids and Structures* 49, 5 (2012), 783-792.
- [15] Feyel, F., and Chaboche, J.-L. Fe 2 multiscale approach for modelling the elastoviscoplastic behaviour of long fibre sic/ti composite materials. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 183, 3 (2000), 309-330.
- [16] Kouznetsova, V., Geers, M. G. D., and Brekelmans, W. A. M. Multiscale constitutive modelling of heterogeneous materials with a gradient-enhanced computational homogenization scheme. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 54, 8 (2002), 1235-1260.
- [17] Z. Liu, M.A. Bessa, and W.K. Liu. Self-consistent clustering analysis: an efficient multi-scale scheme for inelastic

- heterogeneous materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 306 (2016): 319-341.
- [18] Z. Liu, M. Fleming, and W.K. Liu. Microstructural material database for self-consistent clustering analysis of elastoplastic strain softening materials." *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* (2017).
- [19] Hill, R. Elastic properties of reinforced solids: some theoretical principles. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 11, 5 (1963), 357-372.
- [20] Hill, R. A self-consistent mechanics of composite materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13, 4 (1965), 213-222
- [21] Moulinec, H., and Suquet, P. A numerical method for computing the overall response of nonlinear composites with complex microstructure. *Computer methods in applied mechanics and engineering* 157, 1 (1998), 69-94.