

Моделирование болтов при помощи модели GISSMO в анализе столкновений

Флориан Шаувекер^{1 2}, Давид Монкайо¹, Д-р Филипе Андраде³, д-р инж. Маркус Фойхт¹,
Dr.-Ing. Markus Beck¹, Prof. Dr.-Ing. Peter Middendorf²

¹ Daimler AG, Research and Development, Sindelfingen, Germany

² IFB Institute of Aircraft Design, University of Stuttgart, Germany

³ DYNAmore GmbH, Stuttgart, Germany

1. Введение

Точность предсказания поведения болтовых соединений становится все более важной в автомобильной промышленности. Требования и соответственно архитектура автомобилей изменяются в связи с переходом к разработке электромобилей и учета как большой массы аккумуляторных батарей, так и ограничений области их размещения. Болты необходимы в качестве съемных элементов крепления батарей к корпусу при окончательной сборке. В течение последних десятилетий непрерывно разрабатывались концепции поглощения энергии в автомобилях с двигателями внутреннего сгорания. Поведение болтовых соединений и передача нагрузок хорошо известны благодаря многолетнему опыту. Изучение распределения нагрузок в конструкции электромобиля к настоящему времени находятся на относительно ранней стадии разработки. Надежные методы моделирования, позволяющие прогнозировать разрушение болтовых соединений, являются ключевым требованием для оценки и дальнейшей разработки новых концепций аварийных случаев.

Зоннешайн [1]; Хаджианну, Стивенс и Барзотти [2], а также Наркэде и др. [3] исследовали поведение болтов при статических и динамических нагрузках. При численных исследованиях с использованием ПО LS-DYNA тело болта было представлено балочным элементом. Эти методики моделирования являются эффективными в численном отношении, они применимы при моделировании всего автомобиля и удобны на стадии пост-обработки результатов. Однако заложенные в них критерии разрушения, будучи силовыми или деформационными, в качестве приближения используют только двухфакторные или многофакторные линейные подходы. Кроме того, точное моделирование необходимо для получения корректного распределения усилий и правильного учета начальных напряжений.

Франспласс и др. [4, 5] исследовали поведение стержней с резьбой M5 со свойствами класса 4.6 (property class of 4.6) при статических и динамических нагрузках. В своих численных исследованиях они использовали детальные модели с шестигранными объемными элементами и средним размером ячейки сетки в 0,075 мм. Для описания поведения при повреждении и разрушении использовалась термоупругая и термовязкопластичная структурная модель материала *mat_107, реализованная в ПО LS-DYNA.

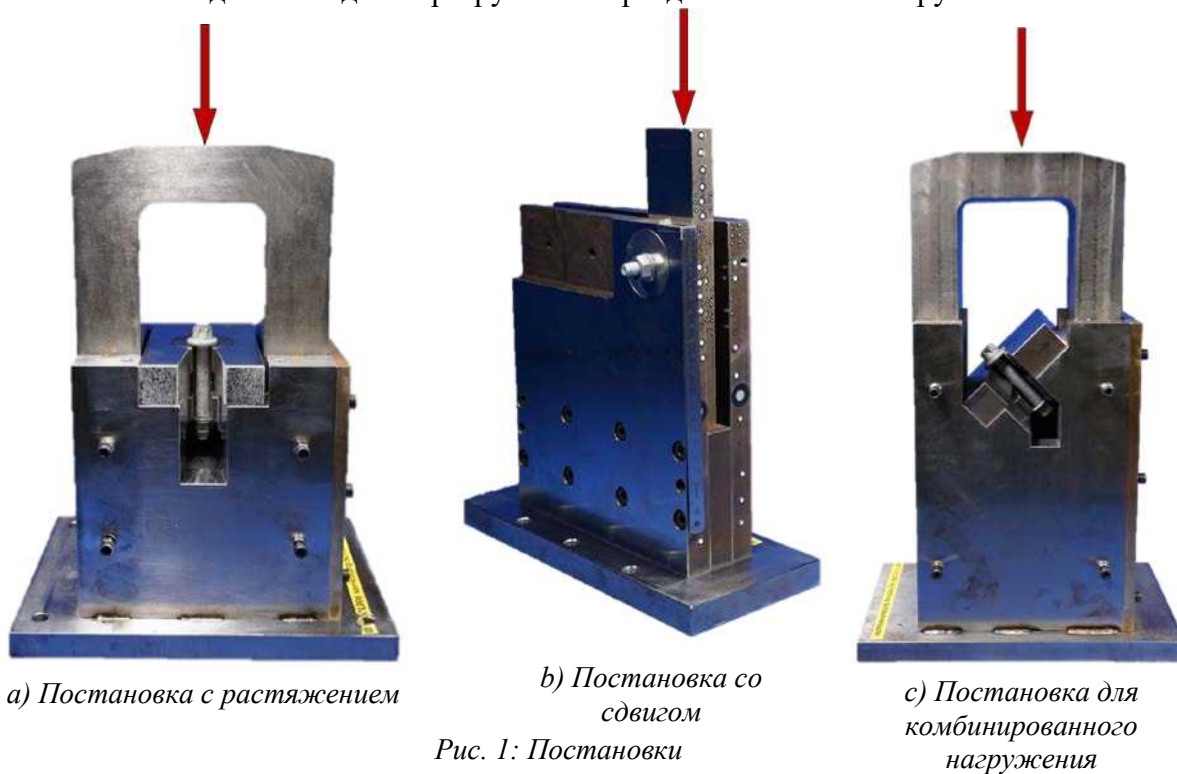
Шаувекер и др. [6] на основе экспериментальных исследований на растяжение, сдвиг и комбинированные нагрузки была показана важность учета поведения резьбы и тела болта. В численной модели со средней длиной элемента в 0,5 мм, которая используется для рассмотрения геометрии резьбы, рассматривается изменение площади поперечного сечения. Номинальный диаметр относится к телу болта, а диаметр поперечного сечения области напряжений относится к резьбовой части болта. В дополнительной публикации Шаувекер и др. [7] показывают, что должно быть рассмотрено для грубого моделирования болта, которое подходило бы для моделирования всего автомобиля на основе площади поперечного сечения. Эти результаты были получены при помощи карточки материала, имеющейся в базе данных материалов компании Даймлер, которая была проверена для стали CP1000 со сложным фазовым составом, свойства материала которой соответствуют требованиям стандарта DIN EN ISO 898-1 [8] для болтов 10.9.

В настоящей статье представлен новый подход к дискретизации, включающий новый метод адаптации параметров материала болтов, состоящих из объемных элементов. Этот метод можно использовать в больших моделях столкновения машин при помощи

LS-DYNA. Специально сконструированные постановки экспериментов дают данные для корректировки параметров материала для изотропной модели материала, объединенной с феноменологической моделью разрушения GISSMO (Generalized Incremental Stress-State dependent damage Model – Обобщенная Инкрементная Модель разрушения, зависящая от Состояния Нагружения) [9]. Трехмерная модель разрушения, основанная на данных испытаний на растяжение и сдвиг, определяет пластическую деформацию, зависящую от коэффициента трехосности η и параметра Лоде ξ . Эта поверхность разрушения получает форму в соответствии с подходом, предложенным такими авторами, как Бай и Вержбицки [10], и скорректирована для модели с мелкой сеткой со средним размером элемента в 0,5 мм. Коэффициент регулирования (regulation factor) последовательно уменьшает пластическую деформацию разрушения и делает ее применимой для модели болта с крупными элементами со средним размером элемента в 2,5 мм. Сравнение результатов указывает на численные ограничения, обусловленные размером дискретизации в моделях с грубой и мелкой сеткой.

2. Экспериментальная часть

На Рис. 1 изображены постановки экспериментов, использованные для исследований поведения болта при разрушении. В этих постановках нагружение, действующее сверху, преобразуется в нагружение растяжения, как показано на Рис. 1 а), нагружение сдвига, как показано на Рис. 1 б) или комбинированное нагружение, как показано на Рис. 1 с). Все части имеют очень большие размеры для того, чтобы разрушение происходило исключительно в болте. Это позволяет использовать данные сборки в копровой машине и наблюдать поведение разрушения при динамических нагрузках. Физические



процессы, описанные в разделе 5, созданы при квазистатической скорости. Самой важной находкой при испытаниях на растяжение стало варьирование деформации разрушения в зависимости от соотношения параметров тела и резьбы. Жесткость, прочность и удлинение варьируют при сдвиге при сравнении тела и резьбы в соединении, подвергнутом сдвигу. Шаувекер и др. [6] подробно описывают особенности этих экспериментальных исследований.

3. Constitutive Model

В изотропной модели материала `*mat_piecewise_linear_plasticity` (`*mat_24`) используется кривая текучести, полученная в испытаниях на растяжение. Чтобы создать кривую текучести, технические значения (инженерные) напряжения и деформации преобразуются в истинные значения напряжения и деформации вплоть до точки образования шейки. После точки образования шейки для экстраполяции кривой текучести применяется подход Хоккетта–Шерби [11]. На Рис. 12 раздела 5 показана корректировка кривой текучести для модели болта с мелкой сеткой и на Рис. 14 показана такая же корректировка для случая модели с грубой сеткой. Повреждения и разрушение рассматриваются исключительно при помощи модели GISSMO, которая применяется к модели материала с дополнительной опцией `*mat_add_erosion`. Модель GISSMO рассчитывает разрушение по критерию, основанному на деформации, в зависимости от состояния напряжения на элементах. Для оболочечных элементов с допущением плоского напряжения состояние напряжения однозначно определяется коэффициентом трехосности напряжения η . Однако у объемных элементов налицо трехмерное напряженное состояние. Поэтому девиаторная переменная напряжения или параметр угла Лоде ξ и трехосность напряжения являются независимыми друг от друга, и деформация разрушения зависит от обоих этих параметров. Уравнение (1) определяет коэффициент трехосности как среднее напряжение σ_m , деленное на напряжение фон Мизеса σ_{vM} . Параметр η – это первый инвариант тензора напряжения Коши. Параметр угла Лоде определяется в уравнении (2) при помощи J_3 как третий инвариант девиаторного тензора напряжения:

$$\eta = \frac{\sigma_m}{\sigma_{vM}} = \frac{1}{3} \frac{I_1}{\sigma_{vM}}$$

$$\xi = \frac{27}{2} \frac{J_3}{\sigma_{vM}^3} \text{ при } J_3 = s_1 s_2 s_3$$

На Рис. 2 показана характеристическая поверхность разрушения пластической деформации разрушения ε_f в соответствии с работой Баи и Вержбицки [10]. Эта асимметричная поверхность определяется тремя кривыми, предложенными Джонсоном и Куком [12] в уравнениях (3–5) при постоянных параметрах угла Лоде ($\xi = 1$, $\xi = 0$ и $\xi = -1$). В дополнение к этому, эти три кривые соединяются, создавая поверхность при помощи квадратичного подхода Баи и Вержбицки [10] в уравнении (6).

$$\varepsilon_f^+(\eta) = D_1 + D_2^{-D_3\eta} \quad \text{для } \xi = 1 \quad (3)$$

$$\varepsilon_f^0(\eta) = D_4 + D_5^{-D_6\eta} \quad \text{для } \xi = 0 \quad (4)$$

$$\varepsilon_f^-(\eta) = D_7 + D_8^{-D_9\eta} \quad \text{для } \xi = -1 \quad (5)$$

$$\varepsilon_f(\eta, \xi) = \left[\frac{1}{2} (\varepsilon_f^-(\eta) + \varepsilon_f^+(\eta) - \varepsilon_f^0(\eta)) \right] \xi^2 + \frac{1}{2} (\varepsilon_f^+(\eta) - \varepsilon_f^-(\eta)) \xi + \varepsilon_f^0(\eta) \quad (6)$$

Подход Баи и Вержбицки позволяет определить поверхность разрушения на основе 9 параметров ($D1, D2, \dots, D9$). Поскольку имеется только 2 экспериментальных результата, необходимо сделать некоторые допущения для получения остающихся пара-

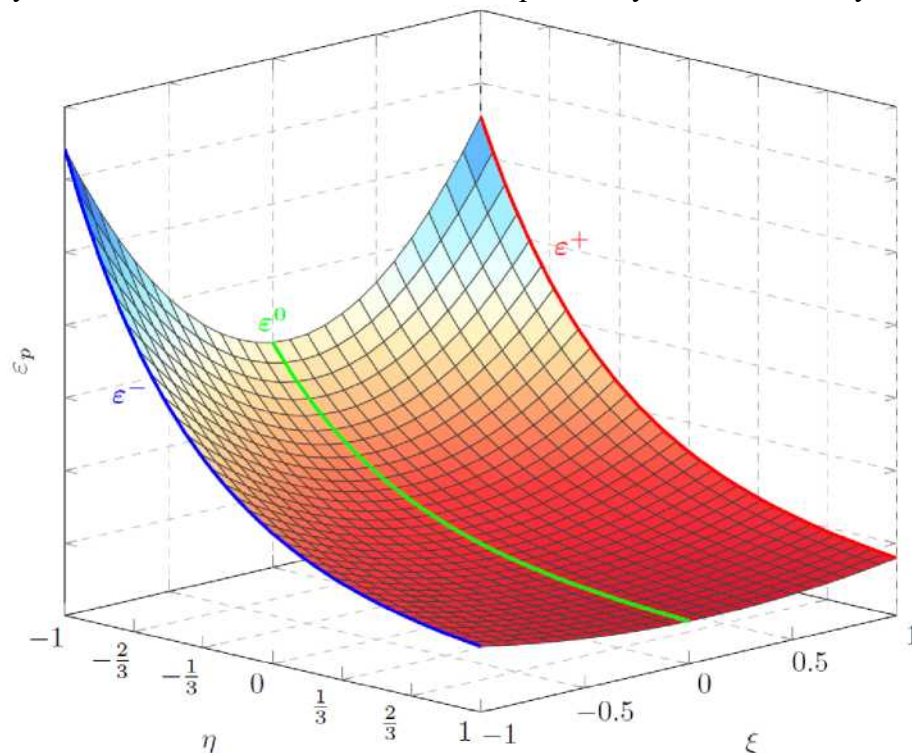


Рис. 2. Характеристическая поверхность разрушения при пластической деформации по Баи и Вержбицки [10]

метров. На Рис. 3 показана характеристическая поверхность разрушения материала болта после реализации следующих допущений.

Для больших значений трехосности различие между тремя кривыми становится пренебрежимо малым. Допущение о том, что все три кривые в бесконечности сходятся к одной деформации разрушения, устраняет два параметра. Будучи высокопрочной сталью, сталь CP 1000 имеет те же параметры материала, что и болт 10.9. Деформация разрушения этой стали для больших значений трехосности, таким образом, рассматривается как подходящее значение. Далее, принимается, что кривые являются идентичными для $\xi = 1$ и $\xi = -1$ (т.е. $\epsilon^+ = \epsilon^-$) в силу отсутствия информации о кривой $\xi = -1$. Это допущение делает поверхность аналогичной подходу Вержбицки и Сю [13] и устраняет еще два параметра. Разрушение не ожидается для значений трехосности ниже $\eta = -2/3$, отсюда деформация разрушения находится на постоянном высоком уровне для $\eta < -2/3$. Переход является непрерывным для $\xi = 1$ и $\xi = -1$ при $\eta = -2/3$. Для кривой $\xi=0$ деформация разрушения сокращается при $\eta = -2/3$ для сохранения вогнутого вида поверхности разрушения. Оставшиеся два параметра адаптируются к результатам экспериментальных исследований. Деформации разрушения при $\eta = 0, \xi = 0$ и $\eta = 2/3, \xi = 1$ корректируются в соответствии с результатами испытаний на сдвиг и растяжение соответственно.

Корректировка карточки материала и, таким образом, поверхности деформации пластического разрушения на Рис. 3, основывается на результатах модели с мелкой сеткой. Коэффициент регулирования последовательно сокращает деформации разрушения для обеспечения того, чтобы карточка материала соответствовала средней длине элемента в 2,5 мм.

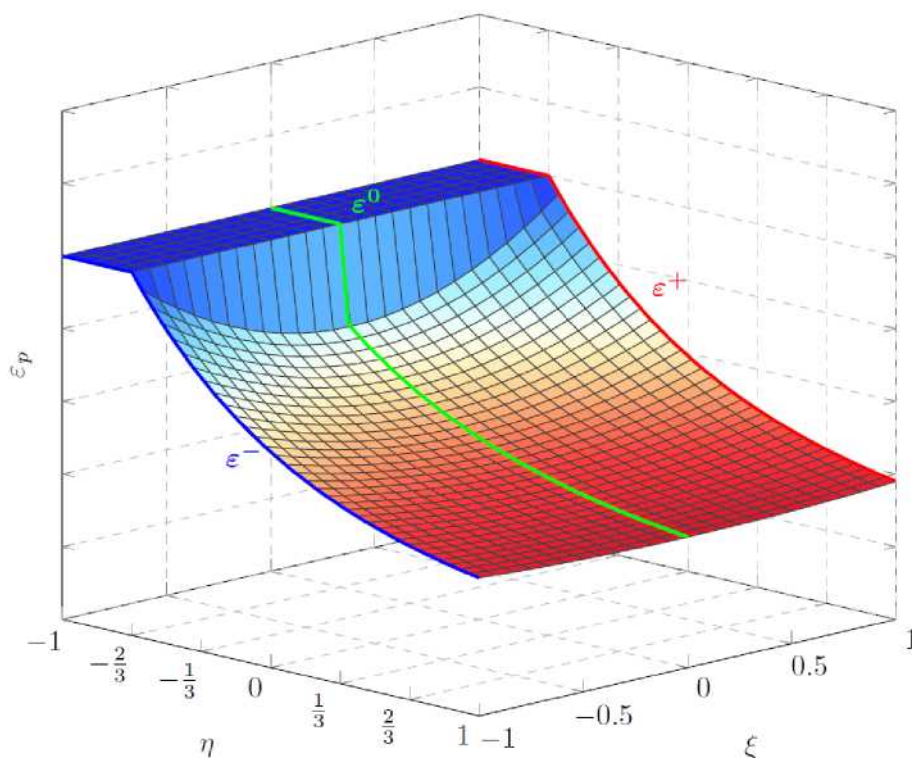


Рис.3. Поверхность разрушения при деформационном разрушении, адаптированная к результатам исследований разрушения болта

Нойкамм [9] дает более подробную информацию о калибровке, проверке и разработке модели повреждений GISSMO. Он уделяет основное внимание применениям с тонкими листовыми металлическими конструкциями, в которых можно допустить приложение плоского напряжения.

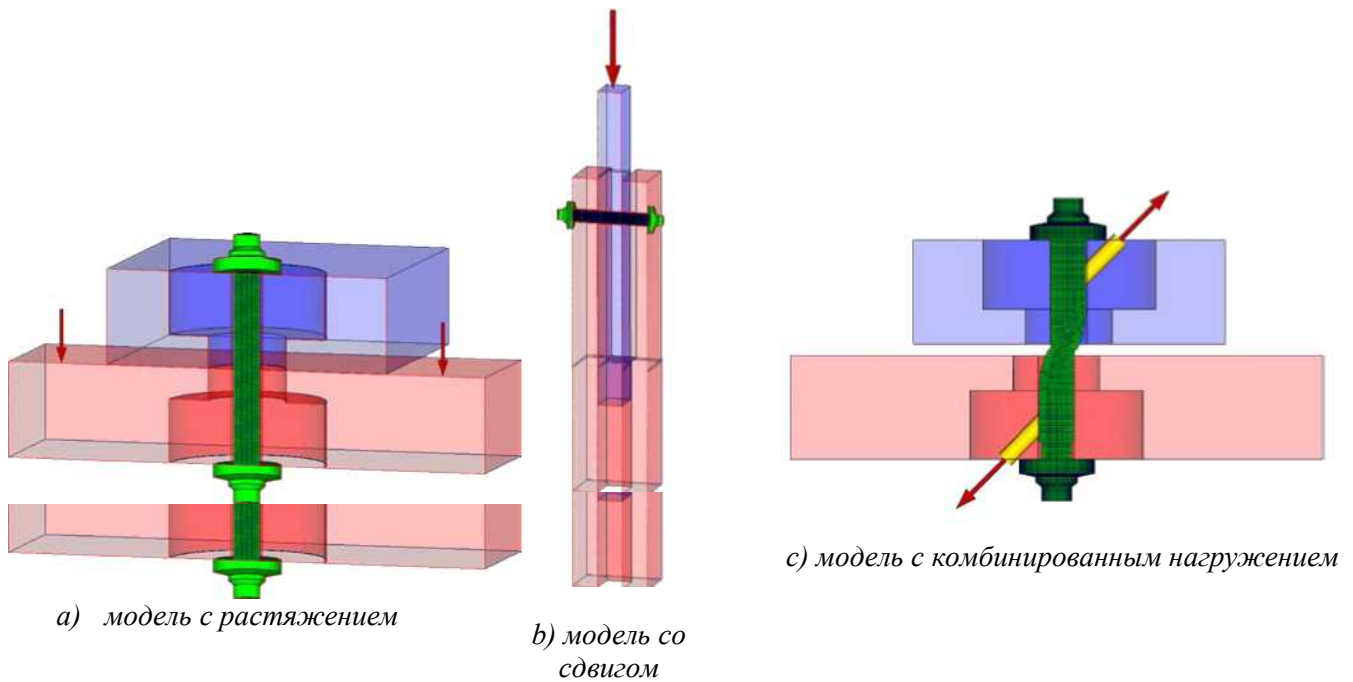
Басаран [14] описывает расширение модели GISSMO на объемные элементы, в которых можно описать трехмерные состояния напряжения. Его работа уделяет основное внимание влиянию и зависимости параметра угла Лоде.

4. Численные модели

4.1 Численная модель с мелкими элементами

Численные модели с мелкими сетками трех различных случаев нагружения представлены на Рис. 4. В работе Шаувекера с соавторами [6] подробно описана модель для испытаний на растяжение на Рис. 4 а) и для испытаний на сдвиг Рис. 4 б). В модели с комбинированным нагружением на Рис. 4 с) используется периферия модели для растяжения с изменением граничных условий.

Локальная координатная система, повернутая на 45° , задает направление смещения. Все узлы на соединяющей части соединены с балочным элементом в центре тяжести соответствующего компонента. В обеих балках используется обычная карточка материала для стали, и они имеют увеличенный диаметр до 1000 мм, чтобы удлинение балок оставалось пренебрежимо малым. Свободный конец верхней балки зафиксирован во всех степенях свободы вращения и перемещения, а постоянное смещение прилагается в локальном направлении Z к свободному концу нижней балки. В обеих балках используется формулировка элемента 9 с моделью материала `*mat_spotweld` (`*mat_100`), что позволяет измерять силы в системе.



На Рис. 5 представлена модель болта с мелкой сеткой в сравнении с реальным болтом. Уменьшение диаметра указывает на переход от тела к резьбовой части. Тело на один ряд элементов толще, чем резьбовая часть для достижения номинального диаметра. Когда размер сетки составляет 0,5 мм, дискретизация является достаточно мелкой для исследования принципиального физического поведения болта. Однако дискретизация по-прежнему не является достаточно мелкой для того, чтобы точно изобразить геометрию резьбы и таким образом в нашей модели видны ограничения механического приближения мезо-масштаба.



Рис. 5: Модель болта с мелкой сеткой в сравнении с реальным болтом

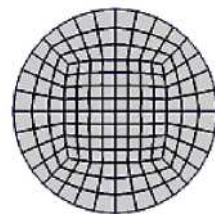


Рис. 6: Поперечное сечение модели болта с мелкой сеткой

На Рис. 6 показано распределение элементов по поперечному сечению.

4.2 Численная модель с крупной сеткой

Численная модель с грубой дискретизацией соответствует модели с мелкой сеткой и в ней используются элементы со средней длиной в 2,5 мм. На Рис. 7 приводится иллюстрация моделей с крупными сетками и соответствующие случаи нагружения.

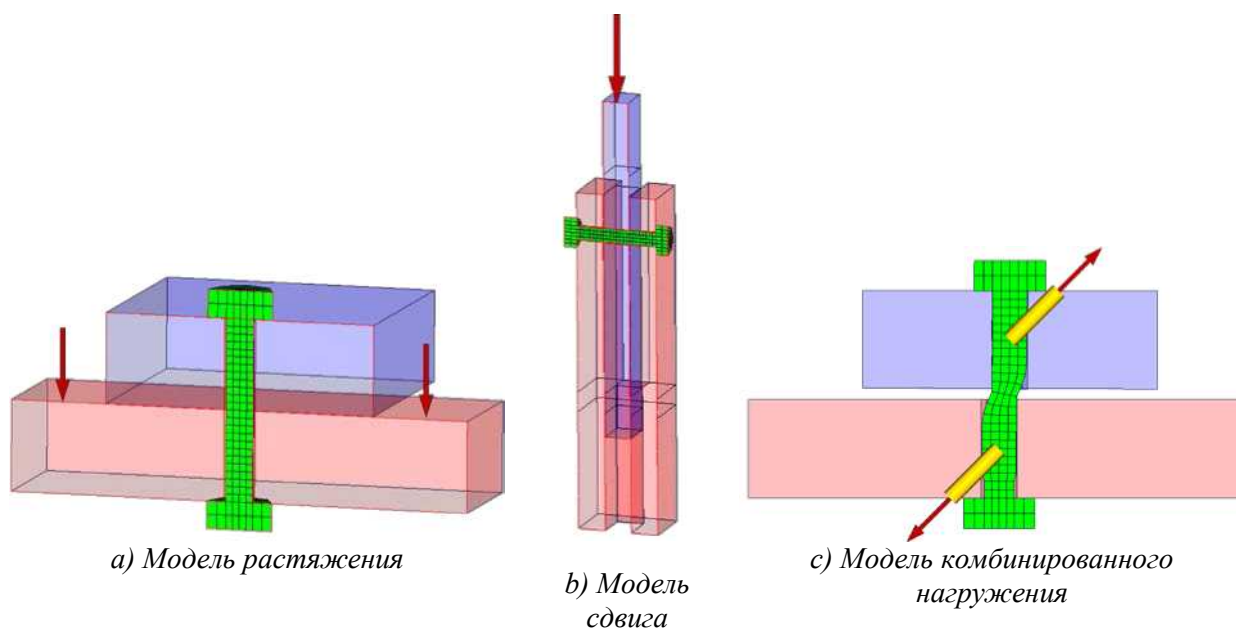


Рис. 7. Модели с крупной сеткой

Геометрия моделирования болта с крупной сеткой показана на Рис. 8 и Рис. 9. В отличие от модели с мелкой сеткой, переход от тела болта к резьбовой части проходит на расстоянии в один ряд элементов. На Рис. 10 показано поперечное сечение болта с крупной сеткой.

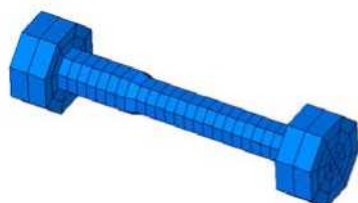


Рис. 8. Модель болта с крупной сеткой



Рис. 9. Модель болта с крупной сеткой в сравнении с реальным болтом

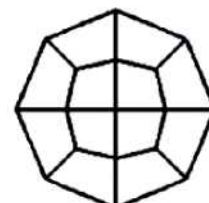


Рис. 10. поперечное сечение модели болта с крупной сеткой

Шаувекер и др. [7] подчеркивают важность того, чтобы площадь поверхности восьмиугольника и круга имели одинаковый диаметр. В некоторых моделях с подстановкой используется номинальный диаметр болта для всего тела и резьбовой части. Это делает площадь поперечного сечения резьбовой части больше, чем у реального болта, а площадь поперечного сечения тела болта становится меньше. В физически корректных моделях площади поперечного сечения модели соответствуют площадям поперечного сечения реальных болтов.

5. Результаты и обсуждение

5.1 Растяжение (без разрушения)

На Рис. 12 представлено поведение материала при испытании на растяжение без учета повреждения и разрушения, на поведение влияет только кривая текучести. Результаты моделирования совпадают с физическим испытанием почти до разрушения. Так как разрушение не активировано, образование шейки продолжается до конца расчета. Вблизи точки начала разрушения результат моделирования начинает отклоняться от экспериментальной кривой, когда элементы начинают избыточно деформироваться. В этой точке размеры элементов достигают своего предела.

На Рис. 11 показано распределение пластической деформации на модели с мелкой сеткой. Пластические деформации появляются в элементах, расположенных вокруг зоны образования шейки, а остальная часть болта остается в основном упругой. Два ряда элементов, расположенных в середине, деформируются сильнее, чем окружающие элементы.

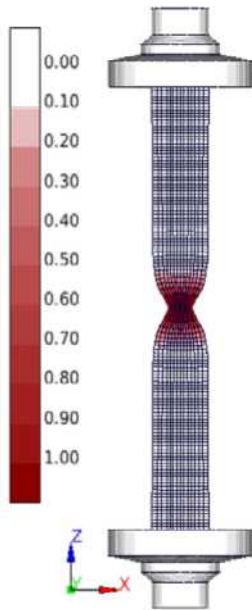


Рис. 11. Максимальные пластические деформации в модели с мелкой сеткой при нагружении растяжением без разрушения

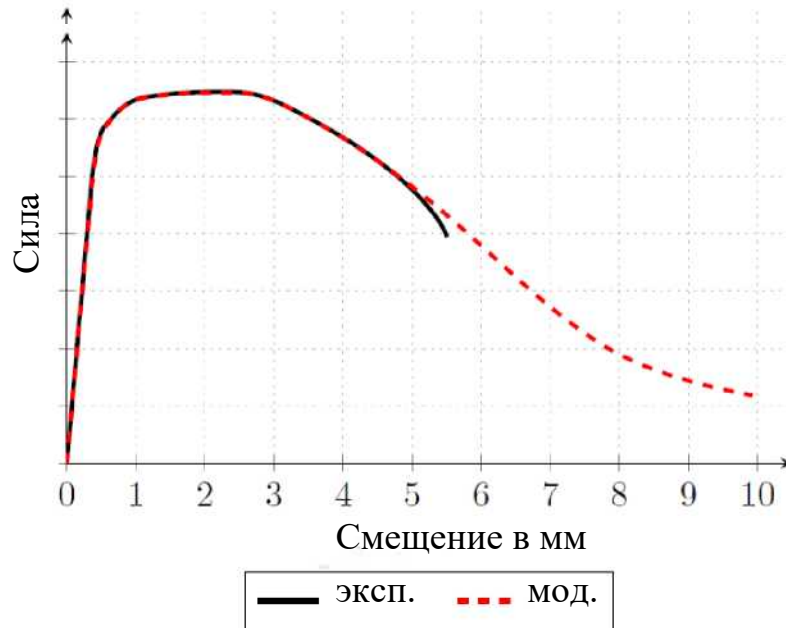


Рис. 12. Диаграмма сила–смещение модели с мелкой сеткой при нагружении на растяжение без учета разрушения.

На Рис. 13 изображено распределение пластической деформации в модели с крупной сеткой при нагружении на растяжение. Как видно из этой иллюстрации, большая часть пластической деформации происходит на двух рядах элементов. Эти два ряда элементов должны показывать ту же деформацию, что и в модели с мелкой сеткой, в которой пластические деформации распределены по десяти рядам элементов. Моделирование с крупной сеткой приводит к более раннему расхождению между численным результатом и результатами испытаний, как видно на диаграмме силы и смещения на Рис. 14.

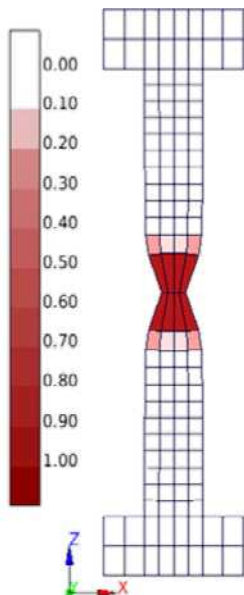


Рис. 13. Максимальные пластические деформации в модели с крупной сеткой при нагружении растяжением без разрушения

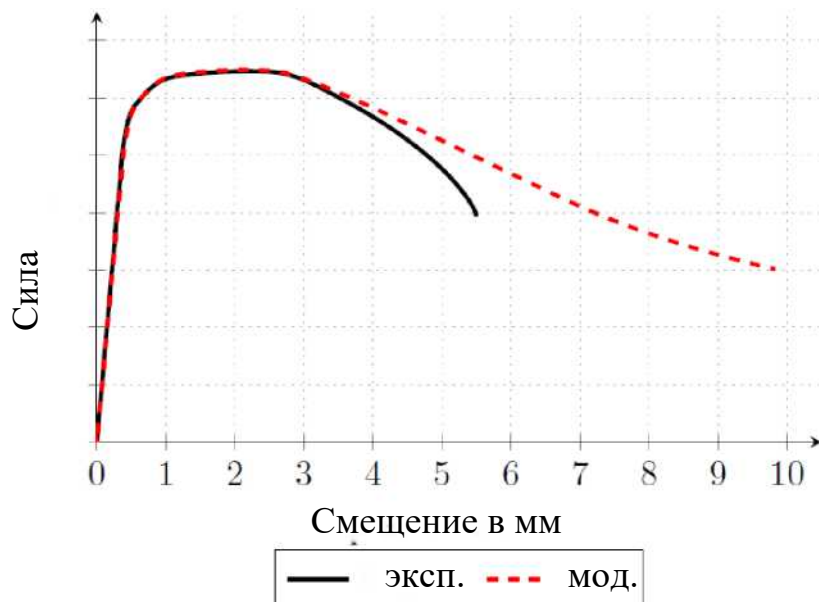


Рис. 14. Диаграмма сила–смещение модели с крупной сеткой при нагружении растяжением без учета разрушения

5.2 Растяжение (с разрушением)

На Рис. 16 представлена диаграмма сила–смещение испытания на растяжение с адаптированной карточкой материала, учитывающей разрушений посредством модели GISSMO. Распределение трехосности по продольному сечению болта в момент непосредственно предшествующий разрушению, показан на Рис 15. В момент начала пластической деформации трехосность элементов в области образования шейки превышает $\eta = \frac{1}{3}$, а у элементов выше и ниже области образования шейки отрицательные значения трехосности.

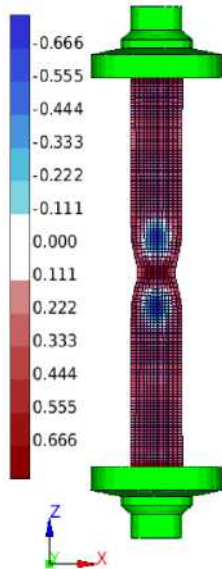


Рис. 15. Трехосность модели болта с мелкой сеткой при растяжении

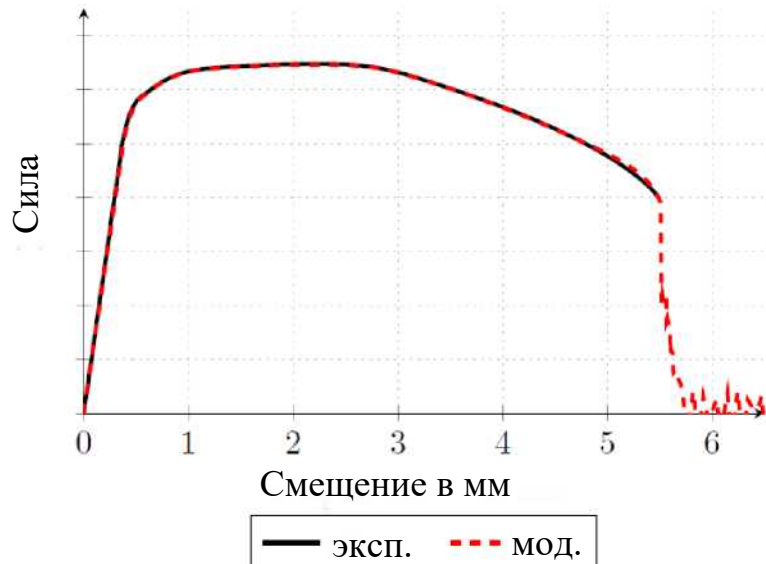


Рис. 16. Диаграмма сила–смещение для модели с мелкой сеткой при растяжении

Как показано на Рис. 17, у элементов видна аналогичная характеристическая трехосность, как и у модели болта с мелкой сеткой. Однако разрешение не достаточно высокое для того, чтобы зафиксировать те же значения трехосности. Это служит причиной сокращения деформаций разрушения. Рис. 18 иллюстрирует ход процесса сила–смещение, также то, что болт разрушается при том же удлинении, но при меньшей силе по сравнению с экспериментальными данными. Идеальное соответствие станет возможным при дальнейшей калибровке карточки материала для этого конкретного размера элементов, геометрии и условий нагружения.

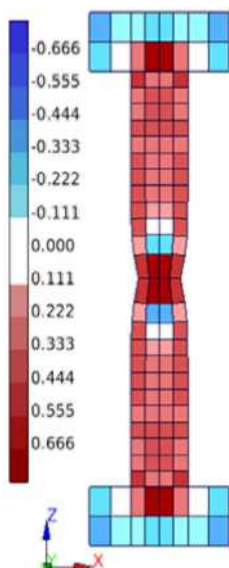


Рис. 17. Трехосность модели болта с крупной сеткой при растяжении

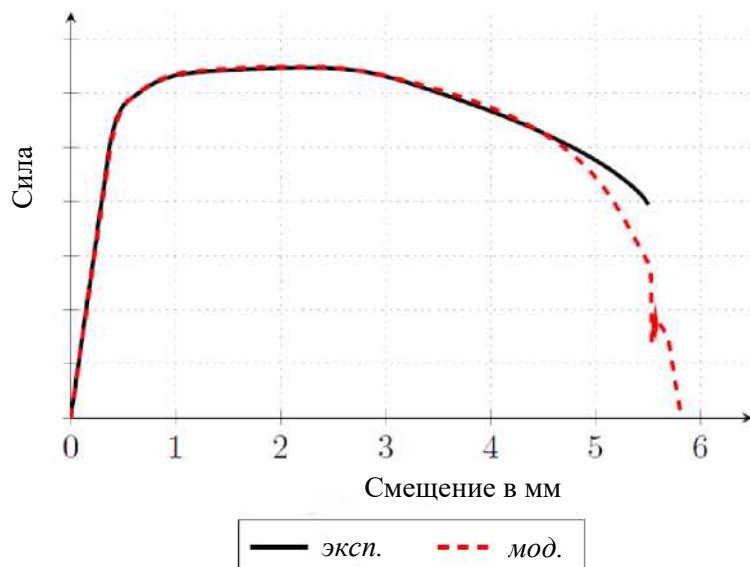


Рис. 18. Диаграмма сила–смещение для модели с крупной сеткой при растяжении.

5.3 Сдвиг (с разрушением)

На Рис. 19 изображен разрез модели болта с мелкой сеткой под действием сдвига непосредственно перед моментом разрушения первого элемента. Элементы в промежутке начинают с трехосности чистого сдвига около $\eta = 0$ и движутся к положительным значениям трехосности, все еще находящимся ниже $\eta = \frac{1}{2}$ при увеличивающейся деформации. На Рис. 20 крупным планом изображены элементы соединения, подвергающегося сдвигу. Параметр угла Лоде для этих элементов находится в интервале между $\xi = -0,5$ и $\xi = 0,5$.

Диаграмма сила-смещение на Рис. 21 показывает результаты воздействия сдвига на тело и резьбовую часть болта. В обоих случаях достигается почти тот же уровень силы, что и в соответствующем физическом испытании. Поглощенная энергия при сдвиге через тело болта равна энергии экспериментального результата. При сдвиге через резьбовую часть, диаграмма показывает, что эффект сжатой резьбы, представленный в разделе 2, нельзя смоделировать при помощи этого типа моделирования. Следовательно, это ведет к расхождению в значениях жесткости и общего удлинения.

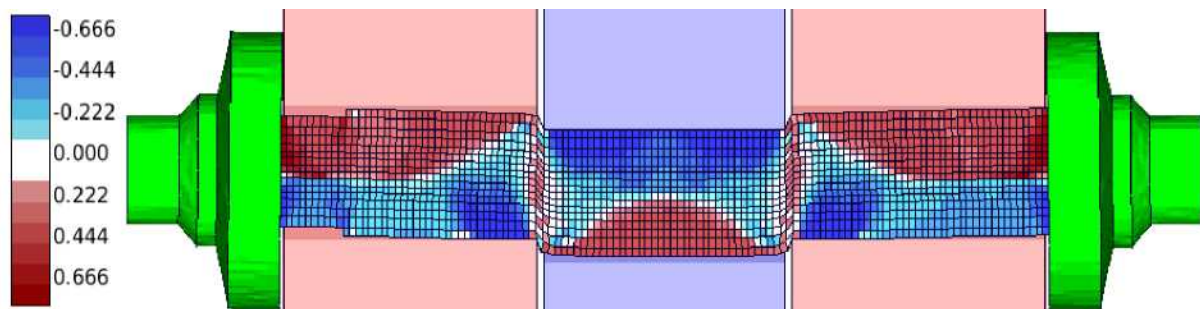


Рис. 19: Трехосность модели с мелкой сеткой при сдвиге

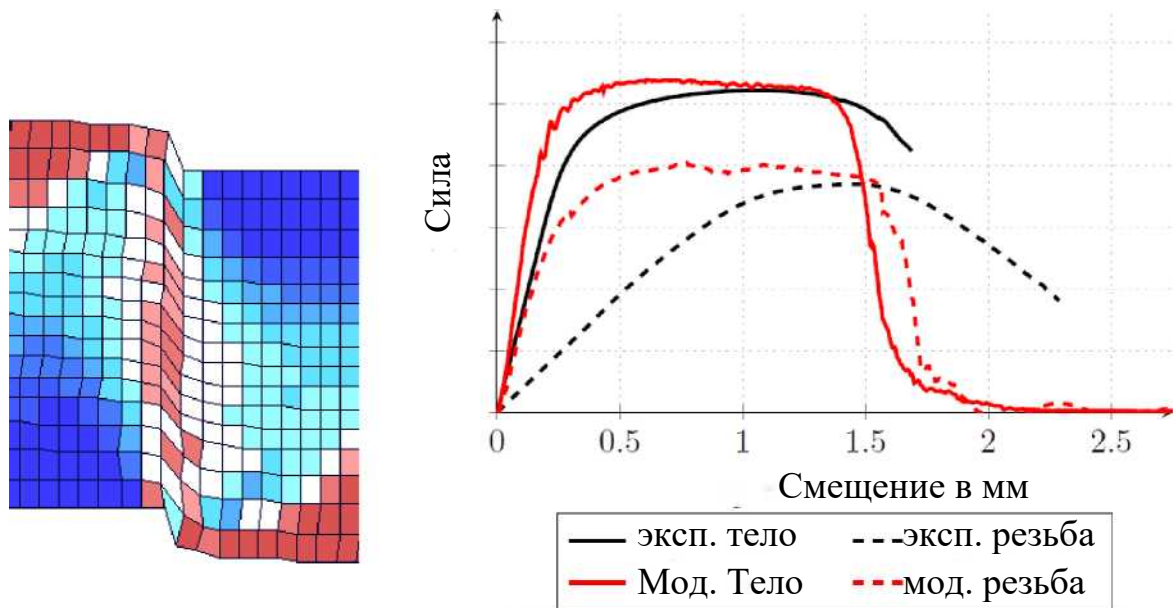


Рис. 21: Диаграмма сила-смещение модели с мелкой сеткой при сдвиге через тело и резьбовую часть

Рис. 20. Крупный план Рис. 19

На Рис. 22 представлено распределение трехосности модели с крупной сеткой при сдвиге непосредственно перед моментом разрушения первого элемента. В начале моделирования элементы сжаты в силу большого своего размера и близости размера элементов к размеру промежутка сдвига в 0,5 мм. Диапазон трехосности варьирует от $\eta = -\frac{2}{3}$ до значений выше $\eta = 0$. Поэтому важно, чтобы деформации разрушения ниже $\eta = -\frac{2}{3}$ не были выбраны слишком большими, так как накопление повреждений будет слишком малым и элементы будут деформироваться далее, не разрушаясь. На Рис. 23 показан крупный план элементов соединения в плоскости сдвига. Здесь край элемента находится точно в середине сдвига, что является идеальным случаем. Результаты у элементов,

находящихся на плоскости сдвига, достигают даже больших уровней силы, чем результаты у идеализированного случая, показанного на диаграмме сила-смещение на Рис. 24.

Максимальная сила в результатах моделирования примерно на 40% выше, чем максимальная сила в эксперименте, а удлинение больше в два раза. Более того, удлинение можно сократить путем дальнейшей калибровки деформации разрушения, что, однако не будет заметно влиять на уровень силы.

В сравнении с моделью с мелкой сеткой, четыре элемента являются слишком крупными для того, чтобы точно описывать реальное поведение материала, а также развитие повреждений при сдвиге.

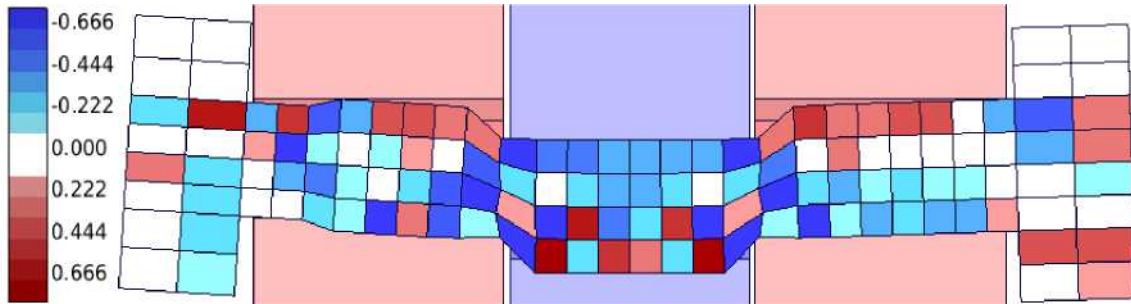


Рис. 22: Трехосность модели болта с крупной сеткой при сдвиге

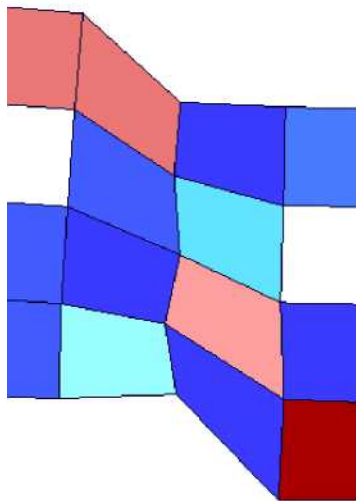


Рис. 23. Крупный план Рис. 22

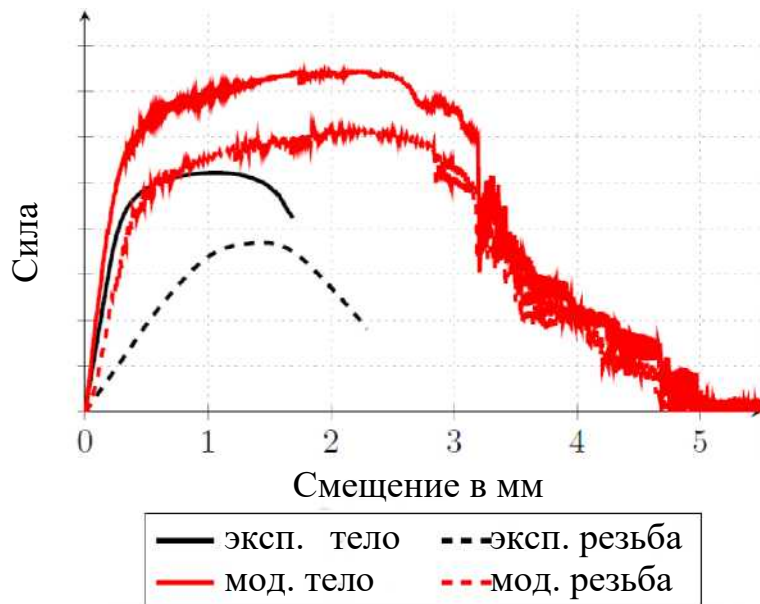


Рис. 24. Диаграмма сила-смещение модели с крупной сеткой для сдвига через тело и резьбу болта

6. Резюме

В статье представлен метод калибровки изотропного основного закона, сопряженного с феноменологической моделью повреждений GISSMO, применимый к моделям болтов для полномасштабного моделирования автомобиля на модели, состоящей из объемных элементов. Для калибровки кривой текучести изотропического основного закона использовались специально разработанные экспериментальные установки. Трехмерная поверхность разрушения определяет деформации разрушения в зависимости от трехосности и угла Лоде в соответствии с подходом Баи и Вержбицки [10]. В силу ограниченности экспериментальных результатов мы сделали некоторые допущения, описанные в статье. Численные результаты модели с мелкой сеткой демонстрируют хорошее согласие с экспериментальными результатами при нагружении растяжением и эквивалентное поглощение энергии при нагружении сдвигом через тело болта. Более того, сравнение моделей с мелкой и крупной сетками показывает ограничения крупной дискретизации, являющейся недостаточной для адекватного описания реальной деформации. Для типичных полномасштабных моделей столкновения автомобилей нужны размеры элементов, которые обеспечивают приемлемое время расчета решения задачи.

В настоящее время с этой целью используются сетки с размером элементов около 3 мм. Поэтому результаты представленного исследования для элементов с размером в 2,5 мм представляются хорошим компромиссом между вычислительной эффективностью и численной точностью.

Наконец, экспериментальная установка и ее численное представление для комбинированных нагрузок на растяжение и сдвиг под углом 45° подтверждает качество откалиброванной карточки материала.

7. Литература

1. U. Sonnenschein, Modelling of bolts under dynamic loads, 7. LS-DYNA Anwenderforum, Bamberg, 2008
2. S. Narkhede, N. Lokhande, B. Gangani, G. Gadekar, Bolted Joint Representation in LS-DYNA to Model Bolted Pre-Stress and Bolt Failure Characteristics in Crash Simulations, 11th International LS-DYNA Users Conference, Dearborn MI USA, 2010
3. M. Hadjiannou, D. Stevens, M. Barsotti, Development and Validation of Bolted Connection Modelling in LS-DYNA for Large Vehicle Models, 14th International LS-DYNA Users Conference, Detroit MI USA, 2016
4. H. Franzplass, M. Langseth, O. S. Hopperstad, Experimental and numerical study of threaded steel fasteners under combined tension and shear at elevated loading rates, International Journal of Impact Engineering, 2015
5. H. Franzplass, M. Langseth, O. S. Hopperstad, Numerical study of the tensile behavior of threaded steel fasteners at elevated rates of strain, International Journal of Impact Engineering, 2013
6. F. Schauwecker, D. Moncayo, M. Beck, P. Middendorf, Investigation of the Failure Behavior of Bolted Connections under Crash Loads and a Novel Adaption to an Enhanced Abstracted Bolt Model, 15th International LS-DYNA Conference, Detroit, Michigan, USA, 2018
7. F. Schauwecker, D. Moncayo, M. Beck, P. Middendorf, Investigation of the Predictive Ability of Idealized Bolt Models for Large Vehicle Simulations under Crash Loads, 18 Dach Conference, Bamberg, 2018
8. International standard, ISO 898-1, mechanical properties on fasteners made of carbon steel and alloy steel - Part 1: bolts, screws and studs, Brussels: European Committee for Standardization, 1999
9. F. Neukamm, Lokalisierung und Versagen von Blechstrukturen: Dissertation, Vol. Nr. 68 of Bericht / Institut für Baustatik und Baudynamik der Universität Stuttgart, Stuttgart, 2018. doi:10.18419/opus-10082.
10. Y. Bai, T. Wierzbicki, A new model of metal plasticity and fracture with pressure and Lode dependence, International Journal of Plasticity 24 (6) (2008) 1071 - 1096. doi:10.1016/j.ijplas.2007.09.004.
11. J. E. Hockett, O. D. Sherby, Large strain deformation of polycrystalline metals at low homologous temperatures, Journal of the Mechanics and Physics of Solids 23 (2) (1975) 87-98. doi:10.1016/0022-5096(75)90018-6
12. G. R. Johnson, W. H. Cook, Fracture characteristics of three metals subjected to various strains, strain rates, temperatures and pressures, Engineering Fracture Mechanics 21 (1) (1985) 31-48. doi:10.1016/0013-7944(85)90052-9.
13. Wierzbicki T, Xue L On the effect of the third invariant of the stress deviator on ductile fracture. Technical report, Impact and Crashworthiness Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA
14. M. Basaran, Stress state dependent damage modeling with a focus on the lode angle influence, Berichte aus dem Maschinenbau, Shaker, Aachen, 2011.